2.6　矩阵的秩

矩阵的初等变换可以将任意一个矩阵化为标准形，而且有很多不同的矩阵会有相同的标准形.此外，一个矩阵可经初等行变换化为不同的阶梯形，但不同的阶梯形中非零行的个数却是相同的.为此，我们引入矩阵秩的概念，它是矩阵内在的一个本质特性，对于矩阵理论的研究和应用，起着十分重要的作用.本节主要介绍矩阵秩的概念和求秩的方法，以及它与初等变换之间的关系.

一、矩阵秩的概念

定义 2.16　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，从 $\boldsymbol{A}$ 中任取 k 行 k 列 $(1\leqslant k\leqslant \min\{m,n\})$，位于这些行和列的相交处的元素，保持它们原来的相对位置所构成的 k 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k **阶子式**.

例 1　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 5 & -6\end{pmatrix},$$

在其中选定第二、三行与第一、三列，则位于其相交处的元素所构成的二阶行列式

$$\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 5\end{vmatrix}$$

就是 $\boldsymbol{A}$ 的二阶子式，易见 $\boldsymbol{A}$ 共有二阶子式的个数为 $C_3^2C_4^2=18$ 个，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有三阶子式为

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -2\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 5\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 5 & -6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -6\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ -2 & 5 & -6\end{vmatrix}.$$

一般地，$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式共有 $C_m^kC_n^k$ 个.

显然，矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的 r 阶子式 $(r\leqslant \min\{m,n\})$ 都有多个，且 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶子式的阶数为 $r\leqslant \min\{m,n\}$.

定义 2.17　若 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中至少有一个 $r(r\leqslant \min\{m,n\})$ 阶子式不为零，而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式（如果有的话）全为零，则称数 r 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**，记为 $R(\boldsymbol{A})=r$.

注：(1) 零矩阵没有非零子式，规定零矩阵的秩为 0；

(2) 标准形矩阵的秩等于其左上方的单位矩阵的阶数，阶梯形矩阵的秩恰为其非零行的个数.

在例 1 中，由于 $\boldsymbol{A}$ 的二阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=10\neq 0$，但 $\boldsymbol{A}$ 的所有三阶子式全为零，则 $R(\boldsymbol{A})=2$. 又如矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 的三阶子式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$，没有四阶以上的子式，则 $R(\boldsymbol{B})=3$.

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵，当 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，则它至少有一个元素不为零，即 $\boldsymbol{A}$ 至少有一个一阶子式不为零，又由于 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶子式的阶数 $r\leqslant \min\{m,n\}$，所以 $0\leqslant R(\boldsymbol{A})\leqslant \min\{m,n\}$.

例 2 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 8 & 2 \\ 2 & 12 & -2 & 12 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

解 因为一阶子式为 $2\neq 0$，二阶子式为

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 12 \end{vmatrix}\neq 0,$$

所有的三阶子式共 4 个，全为零，所以 $R(\boldsymbol{A})=2$.

二、利用初等变换求矩阵的秩

根据定义 2.17，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，需计算多个行列式的值是比较麻烦的. 下面介绍矩阵的秩与初等变换之间的关系，从而引出求矩阵的秩的简便计算方法.

定理 2.8 矩阵的初等变换不改变矩阵的秩.

证 仅考察经一次初等行变换的情形，对第(1)、(2) 两种变换，请读者自证，现证第(3) 种初等行变换不改变矩阵的秩.

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的第 j 行乘以 k 倍加到第 i 行变为矩阵 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的任意一个 $r+1$ 阶子式，且 $R(\boldsymbol{A})=r$，即 $\boldsymbol{A}$ 有一个 r 阶子式不为零，所有 $r+1$ 阶子式(如果有的话) 全为零.

若 $\boldsymbol{D}$ 中不含有 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行的元素，则 $\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $r+1$ 阶子式，从而 $\boldsymbol{D}=0$；若 $\boldsymbol{D}$ 中含有 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行的元素，且不含有 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 行的元素，则由行列式的性质知，

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{ir+1}+ka_{jr+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+11} & a_{r+12} & \cdots & a_{r+1r+1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+11} & a_{r+12} & \cdots & a_{r+1r+1} \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+11} & a_{r+12} & \cdots & a_{r+1r+1} \end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{D}_1+k\boldsymbol{D}_2,$$

由于 $\boldsymbol{D}_1$ 与 $\boldsymbol{D}_2$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的 $r+1$ 阶子式为零，从而 $\boldsymbol{D}=0$.

若 $\boldsymbol{D}$ 中含有 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行的元素，且含有 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 行的元素，则由行列式的性质知，

$$\boldsymbol{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{ir+1}+ka_{jr+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+11} & a_{r+12} & \cdots & a_{r+1r+1} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+11} & a_{r+12} & \cdots & a_{r+1r+1} \end{vmatrix}+k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jr+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r+11} & a_{r+12} & \cdots & a_{r+1r+1} \end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{D}_1+k\boldsymbol{D}_2,$$

由于 $\boldsymbol{D}_1$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $r+1$ 阶子式为零，$\boldsymbol{D}_2$ 有两行元素完全相同为零，从而 $\boldsymbol{D}=0$.

故综上所述，得

$$R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{B}).$$

又因为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可看成是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 经过初等行变换得到的（矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 行乘以 $-k$ 倍加到第 i 行即可），故同理可证 $R(\boldsymbol{A})\leqslant R(\boldsymbol{B})$.

因此，

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B}).$$

例 3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 5 & -6\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

解 因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 5 & -6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3\\ 0 & -2 & 5 & -6\\ 0 & -2 & 5 & -6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & 3\\ 0 & -2 & 5 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是一个阶梯形矩阵,其非零行有两行,故 $R(\boldsymbol{A})=2$.

例 4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

解 由矩阵的初等变换有

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -2 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

由于 $|\boldsymbol{B}|=-16\neq 0$,而矩阵 $\boldsymbol{B}$ 中不为零子式的最高阶数为 4,所以 $R(\boldsymbol{A})=4$.

定理 2.9 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 n 的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,即 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$.

例 5 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}k & 1 & 1 & 1\\ 1 & k & 1 & 1\\ 1 & 1 & k & 1\\ 1 & 1 & 1 & k\end{pmatrix},$$

且秩 $R(\boldsymbol{A})=3$,求常数 k.

解 因为有 $R(\boldsymbol{A})=3$,则 $|\boldsymbol{A}|=0$,解得 $k=1,k=-3$.

当 $k=1$ 时,

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

则当 $k=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=1$，故只有当 $k=-3$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$.

例 6　求下列矩阵的秩.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&3&0&1\\4&-1&1&-2\\2&-2&0&1\end{pmatrix}.$$

解　因为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&3&0&1\\4&-1&1&-2\\2&-2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2+4r_1}\begin{pmatrix}-1&3&0&1\\0&11&1&2\\0&4&0&3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{pmatrix}-1&0&3&1\\0&1&11&2\\0&0&4&3\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是阶梯形矩阵，其非零行是三行，故 $R(\boldsymbol{A})=3$.

例 7　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶可逆矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵时，则

$$R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B}).$$

证　因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则由定理 2.7 知，存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_s(i=1,2,\cdots,s)$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s,$$

于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_s\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{AB}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 经过 s 次初等变换后得出的.再由定理 2.8 知

$$R(\boldsymbol{AB})=R(\boldsymbol{B}).$$

习题 2.6

1.已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&3&0&-2\\-1&-4&3&0\\1&-5&6&-2\end{pmatrix}$，

（1）计算 $\boldsymbol{A}$ 的所有三阶子式；　（2）求 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

2.求下列矩阵的秩.

(1)$\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{pmatrix}$；　　(2)$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4\\ 2 & 4 & 3 & 5\\ -1 & -2 & 6 & -7\end{pmatrix}$；

(3)$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 4 & -2\\ 4 & -3 & 1 & 1\end{pmatrix}$；　　(4)$\begin{pmatrix}2 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$.

3.设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{P}_{m\times n}$，$\boldsymbol{Q}_{m\times n}$ 为可逆矩阵.试证：

$$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{PA})=R(\boldsymbol{AQ}).$$

4.证明：如果 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵($n\geqslant 2$)，则

$$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, & R(\boldsymbol{A})=n\\ 1, & R(\boldsymbol{A})=n-1\\ 0, & R(\boldsymbol{A})<n-1\end{cases}.$$

复习题 2

一、填空题

1.设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 5\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$，则 $2\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=$________.

2.设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为二阶单位阵，则 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E}=$__________.

3.矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 为 $s\times t$ 阶矩阵，当满足____时，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 才能相乘，此时，$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 为____阶矩阵.

4.矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，当满足__________时，$\boldsymbol{A}$ 是可逆阵，其逆阵为______.

5.矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵，以 5 乘以第一行后加到第三行上，相当于用初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{31}(5)=$________左乘 $\boldsymbol{A}$；将第二列与第四列对换，相当于用初等矩阵 $\boldsymbol{P}_{24}=$________右乘 $\boldsymbol{A}$.

6.如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{AA}'=\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，则 A 为________矩阵，$\boldsymbol{A}$ 的每行元素(列元素)的平方和为________.

二、选择题

1.若 $\boldsymbol{A}$ 为四阶方阵,且 $|\boldsymbol{A}|=5$,则 $|3\boldsymbol{A}|=($　　).

A. 15　　B. 60　　C. 405　　D. 45

2.若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&2\\0&4&5\\0&0&6\end{pmatrix}$,则伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=($　　).

A. $\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{12}\\0&\frac{1}{4}&-\frac{5}{24}\\0&0&\frac{1}{6}\end{pmatrix}$　　B. $\begin{pmatrix}24&-12&-2\\0&6&-5\\0&0&4\end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix}24&12&-2\\0&6&5\\0&0&4\end{pmatrix}$　　D. $\begin{pmatrix}24&0&0\\-12&6&0\\-2&-5&4\end{pmatrix}$

3.分块矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是可逆方阵,则 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=($　　).

A. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{-1}\\\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$　D. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}^{-1}\end{pmatrix}$

4.若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&-1\\x&5&-3\\1&-2&3\end{pmatrix}$ 为奇异阵,则 $x=($　　).

A. 1　　B. 2　　C. 0　　D. -2

5.一系列初等矩阵的乘积必是(　　).

A. 单位矩阵　　B. 零矩阵　　C. 奇异阵　　D. 非异阵

三、计算与证明题

1.设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\-1&2&5\\3&1&2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}5&1&-7\\3&0&1\\1&-1&8\end{pmatrix}$,且 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}$,求 $\boldsymbol{X}$.

2.设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&-1&-3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&5\\-1&2\\3&-2\\1&4\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$.

3.设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & -2 & 2\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 3 & -1\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{B}^2-(\boldsymbol{AB}^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}^2$.

4.设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 4\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$,$\boldsymbol{B}^{-1}$.

5.若 $\boldsymbol{X}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{X}$.

6.设 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$,且 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{A}$.

7.设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 8 & 5\end{pmatrix}$,利用分块矩阵,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

8.设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 3 & 0\\ 1 & -2 & 6 & 4\end{pmatrix}$,用初等变换法,求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

9.已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 5 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 7\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$,求$(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}$.

10.设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为可逆矩阵,证明分块矩阵$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$的逆矩阵等于$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$.